

Элементы линейной алгебры

студента(ки) _____ курса _____ факультета

группы № _____

направления _____

Ставрополь
2017

ГЛАВА 1 МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1 Матрицы. Основные понятия и определения

Определение 1. Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются элементами матрицы.

Матрицы обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита, например, A, B, C, \dots , а для обозначения элементов матрицы используются строчные буквы с двойной индексацией: a_{ij} , где i - номер строки, j - номер столбца.

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или, в сокращенной записи,

$$A = (a_{ij}); \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Например, $A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ 3 & -5 & 8 \end{pmatrix}$. Наряду с круглыми скобками

используются и другие обозначения матрицы: $[\]$, $\| \|$.

Две матрицы A и B одного размера называются **равными**, если они совпадают поэлементно, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для любых $i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n$.

Виды матриц. Матрица, состоящая из одной строки, называется **матрицей-строкой (вектором-строкой)**, а из одного столбца – **матрицей-столбцом (вектором-столбцом)**:

$$A = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}) - \text{матрица-строка}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix} - \text{матрица-столбец}.$$

Матрица называется **квадратной** n -го порядка, если число её строк равно числу столбцов и равно n .

Например, $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & -7 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ - квадратная матрица третьего порядка.

Элементы матрицы a_{ij} , у которых номер столбца равен номеру строки ($i = j$), называются **диагональными** и образуют **главную диагональ** матрицы. Для квадратной матрицы главную диагональ образуют элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. Если все недиагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, то матрица называется **диагональной**.

Например, $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ - диагональная матрица третьего порядка.

Если у диагональной матрицы n -го порядка все диагональные элементы равны единице, то матрица называется **единичной** матрицей n -го порядка, она обозначается буквой E .

Например, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - единичная матрица третьего порядка.

Матрица любого размера называется **нулевой**, если все её элементы равны нулю:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

1.2 Операции над матрицами. Умножение матрицы на число

Определение 1. Произведением матрицы A на число α называется матрица $B = \alpha A$, элементы которой $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ при $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Следствие. Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

В частности, произведение матрицы A на число 0 есть нулевая матрица, т.е. $0 \cdot A = O$.

Определение 2. Суммой двух матриц A и B одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C = A + B$, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ при $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$ (т.е. матрицы складываются поэлементно). В частном случае $A + O = A$.

Определение 3. Разность двух матриц одинакового размера определяется через предыдущие операции: $A - B = A + (-1) \cdot B$.

Определение 4. Умножение матрицы A на матрицу B определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Тогда произведением матриц $A \cdot B$ называется такая матрица C , каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{s=1}^k a_{is}b_{sj}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Определение 5. Целой положительной степенью A^m ($m > 1$) квадратной матрицы A называется произведение m матриц, равных A , т.е.:

$$A^m = A \cdot A \cdot \dots \cdot A.$$

Заметим, что операция возведения в степень определяется только для квадратных матриц. По определению полагают $A^0 = E$, $A^1 = A$. Нетрудно показать, что $A^m \cdot A^k = A^{m+k}$, $(A^m)^k = A^{mk}$.

Транспонирование матрицы – переход от матрицы A к матрице A' , в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка. Матрица A' называется **транспонированной** относительно матрицы A :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Из определения следует, что если матрица A имеет размер $m \times n$, то транспонированная матрица A' имеет размер $n \times m$.

Например, $A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad A'_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$

В литературе встречаются и другие обозначения транспонированной матрицы, например A^T .

Решение типовых примеров

Пример 1. Умножить матрицу на число 5, если $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$

$$5A = \begin{pmatrix} -10 & 20 \\ 15 & 40 \end{pmatrix}$$

Пример 2. Вынести общий множитель за знак матрицы:

$$\begin{pmatrix} 20 & 12 & 6 \\ 52 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 10 & 6 & 3 \\ 26 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Найти матрицу $C=A+B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 8 & 10 & 7 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Вычислить произведение матриц $A \cdot B$,

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем размер матрицы-произведения (если умножение матриц возможно): $A \cdot B = C$. Вычислим элементы матрицы-произведения C ,

умножая элементы каждой строки матрицы A на соответствующие элементы столбцов матрицы B следующим образом:

$$\tilde{N} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 \cdot (-2) & (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 0 & (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 0 \cdot (-2) & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 4 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Получаем } C = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 1 \\ 29 & 16 & 19 \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Найти A^2 , где $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\text{Решение. } A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 24 & 32 \end{pmatrix}.$$

Задания для решения в аудитории

$$1. \text{ Найти матрицу } C=A+B, \text{ если } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & 6 & 7 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

2. Найти матрицу $D=C - F$, если $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & -7 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

3. Найти матрицу $E=4S+2G$, если $S = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

4. Найти матрицу $X=A \cdot B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -7 \\ -1 & 6 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

1.3 Определители квадратных матриц

Определителем матрицы первого порядка $A = (a_{11})$, или **определителем первого порядка**, называется элемент a_{11} : $\Delta_1 = |A| = a_{11}$.

Например, пусть $A = (8)$, тогда $\Delta_1 = |A| = 8$.

Определитель матрицы A обозначается $|A|$, Δ или $\det A$.

Определителем матрицы второго порядка $A = (a_{ij})$, или **определителем второго порядка**, называется число, которое находится по

формуле $\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Пусть дана квадратная матрица третьего порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Определителем матрицы третьего порядка $A = (a_{ij})$, или **определителем третьего порядка**, называется число, которое находится по формуле $\Delta_3 = |A| = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Определитель третьего порядка удобно вычислять по правилу треугольников (или по правилу Сарриуса). Покажем это на схеме:

$$\begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix}$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 \cdot 5 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = \\ = 0 + 4 - 12 - 0 + 10 - 4 = -2.$$

Для того, чтобы ввести понятие определителя более высокого порядка, потребуются некоторые дополнительные понятия.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы A n -го порядка называется определитель матрицы $(n-1)$ -го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием i -й строки и j -го столбца. Например, минором элемента a_{12} матрицы A третьего порядка будет:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}.$$

Каждая матрица n -го порядка имеет n^2 миноров $(n-1)$ -го порядка.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n -го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, т.е. алгебраическое дополнение совпадает с минором, если сумма номеров строки и столбца $(i+j)$ - четное число, и отличается от минора знаком, если $(i+j)$ - нечетное число.

Например, $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$; $A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31}$.

Определение. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраическое

дополнение $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{s=1}^n a_{1s}A_{1s}$ (разложение по элементам 1-й строки).

Например, вычисление определителя 4-го порядка сведется к вычислению четырех определителей 3-го порядка.

Свойства определителей:

- 1) Определитель не меняется, если в нем строки и столбцы поменять местами.
- 2) Если в определителе поменять местами какие-либо две строки или два столбца, то определитель изменит только знак.
- 3) Общий множитель какой-либо строки (столбца) можно выносить за знак определителя.
- 4) Если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя равны нулю, то определитель равен нулю.
- 5) Определитель равен нулю, если элементы каких-либо двух строк равны или пропорциональны.
- 6) Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на любое не равное нулю число. Это так называемый способ получения нулей.

Пример.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-3)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 7 \\ 5 & -13 & 12 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -13 & 12 \end{vmatrix} = -24 + 91 = 67$$

(2)

- 7) Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю.

$$a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} + a_{13} \cdot A_{23} = 0$$

Решение типовых примеров

Пример 1. Вычислить определитель второго порядка, если $A = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

Решение. $\Delta = |A| = \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 - 8 \cdot 1 = -18.$

Пример 2. Вычислить определитель третьего порядка $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение. $\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 6 = 21$.

Пример 3. Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0; & A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3; & A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6; \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; & A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -5; \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7; & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5; & A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4. \end{aligned}$$

Пример 4. Вычислить определитель четвертого порядка

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Решение. Преобразуем матрицу так, чтобы в 3-й строке все элементы, кроме одного, обращались в нуль. Для этого умножим, например, элементы 3-го столбца на (-4) и на 2 и прибавим их соответственно к элементам 1-го и 2-го столбцов. Раскладывая полученный определитель по элементам третьей строки, найдем:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 2 & -2 & 4 \\ 13 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 12 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 13 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель третьего порядка можно вычислить по правилу треугольников или с помощью свойства 6, однако можно продолжить упрощение матрицы. «Обнулим» в матрице третьего порядка элементы 2-й строки (кроме одного). Для этого элемента 3-го столбца

матрицы, предварительно умножив на (-13) и на 4, сложим с элементами 1-го и 2-го столбцов соответственно:

$$|A| = \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 12 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -40 & 18 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -88 & 36 & 6 \end{vmatrix}.$$

Раскладывая по элементам второй строки и вынося общие множители, получаем:

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -40 & 18 \\ -88 & 36 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-8) \cdot 18 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = -144.$$

Пример 5. Вычислить определитель треугольной матрицы

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

(Квадратная матрица называется треугольной, если все ее элементы, расположенные ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю).

Раскладывая по первому столбцу, получаем:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 = 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 0 + 0 = \\ = 2 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 4 + 0 = -24.$$

Задания для решения в аудитории

1. Вычислить определители:

$$1) \Delta = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$2) \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$3) \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$4) \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$5) \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$6) \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

1.4 Обратная матрица

Определение. Матрица A^{-1} называется **обратной по отношению к квадратной матрице** A , если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Из определения следует, что только квадратная матрица имеет обратную; в этом случае и обратная матрица является квадратной того же

порядка. Необходимо отметить, что для существования матрицы A^{-1} является требование $|A| \neq 0$.

Если определитель матрицы отличен от нуля ($|A| \neq 0$), то такая квадратная матрица называется **невырожденной**, или **неособенной**; в противном случае (при $|A| = 0$) - **вырожденной**, или **особенной**.

Алгоритм вычисления обратной матрицы:

1. Находим определитель исходной матрицы. Если $|A| = 0$, то матрица A – вырожденная и обратная матрица A^{-1} не существует. Если $|A| \neq 0$, то матрица A – невырожденная и обратная матрица существует.

2. Находим матрицу A' , транспонированную к A .

3. Находим алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы $A'_{ij} = A_{ji}$ ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$) и составляем из них присоединенную матрицу $\tilde{A} : \tilde{a}_{ij} = A'_{ij} = A_{ji}$ ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$).

4. Вычисляем обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$; ($|A| \neq 0$).

5. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы A^{-1} исходя из ее определения $A^{-1}A = A \cdot A^{-1} = E$ (п. 5 не обязателен).

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти матрицу, обратную к данной, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

1. Определитель матрицы $|A| = 21 \neq 0$, т.е. матрица A – невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует.

2. Находим матрицу A' , транспонированную к A :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A' и составляем из них присоединенную матрицу \tilde{A} , учитывая, что

$$A'_{ij} = A_{ji} : \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 14 & -7 \\ -3 & -1 & 5 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Вычисляем обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 0 & 14 & -7 \\ -3 & -1 & 5 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0}{21} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{21} & -\frac{1}{21} & \frac{5}{21} \\ \frac{6}{21} & -\frac{5}{21} & \frac{4}{21} \end{pmatrix}.$$

5. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы по формулам: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Задания для решения в аудитории

Найти обратные матрицы для матриц:

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$2) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1.5 Ранг матрицы

В матрице A размером $m \times n$ вычеркиванием каких-либо строк и столбцов можно вычленить квадратные подматрицы k -го порядка, где $k \leq \min(m; n)$. Определители таких подматриц называются **минорами k -го порядка матрицы A** .

Например, из матрицы $A_{3 \times 4}$ можно получить подматрицы первого, второго и третьего порядков.

Рангом матрицы A называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Ранг матрицы A обозначается $\text{rang } A$, $\text{rg } A$ или $r(A)$. Из определения следует:

а) ранг матрицы $A_{m \times n}$ не превосходит меньшего из ее размеров, т.е. $r(A) \leq \min(m; n)$;

б) $r(A) = 0$ тогда и только тогда, когда элементы матрицы равны нулю, т.е. $A=O$;

в) для квадратной матрицы n -го порядка $r(A) = n$ тогда и только тогда, когда матрица A – невырожденная.

В общем случае определение ранга матрицы перебором всех миноров достаточно трудоемко. Для облегчения этой задачи используются преобразования, сохраняющие ранг матрицы. Назовем **элементарными преобразованиями** матрицы следующие:

1. Отбрасывание нулевой строки (столбца).
2. Умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число, не равное нулю.
3. Изменение порядка строк (столбцов) матрицы.
4. Прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число.
5. Транспонирование матрицы.

Теорема 1. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

При изучении свойств определителей было показано, что при преобразованиях квадратных матриц их определители либо сохраняются, либо умножаются на число, не равное нулю. В результате сохраняется наивысший порядок отличных от нуля миноров исходной матрицы, т.е. ее ранг не изменяется.

С помощью элементарных преобразований можно привести матрицу к так называемому ступенчатому виду, когда вычисление ее ранга не представляет труда.

Матрица A называется **ступенчатой**, если она имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix},$$

где $a_{ii} \neq 0, i=1,2,\dots,r; r \leq k$.

Замечание. Условие $r \leq k$ всегда может быть достигнуто транспонированием матрицы.

Очевидно, что ранг ступенчатой матрицы равен r , так как имеется минор r -го порядка, не равный нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{rr} \neq 0.$$

Покажем на примере вычисление ранга матрицы с помощью окаймляющих миноров и элементарных преобразований.

Решение типовых примеров

Пример 1. Вычислить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Решение. Для матрицы $A_{3 \times 4}$ ранг $r(A) \leq \min(3;4)=3$. Проверим, равен ли ранг трём, для этого вычислим все миноры третьего порядка, т.е. определители всех подматриц третьего порядка (их всего 4, они получаются при вычеркивании одного из столбцов матрицы):

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку все миноры третьего порядка нулевые, $r(A) \leq 2$. Так как существует ненулевой минор второго порядка, например $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$, то $r(A) = 2$.

Пример 2. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение.

1. Если $a_{11} = 0$, то при перестановке строк или столбцов добиваются того, что $a_{11} \neq 0$. В данном примере поменяем местами, например, 1-ю и 2-ю строки матрицы.

2. Если $a_{11} \neq 0$, то, умножая элементы 2-й, 3-й и 4-й строк на подходящие числа (именно на $-a_{21}/a_{11} = 0$, $-a_{31}/a_{11} = 2$, $-a_{41}/a_{11} = 1$) и прибавляя полученные числа соответственно к элементам 2-й, 3-й и 4-й строк, добьемся того, чтобы все элементы 1-го столбца (кроме a_{11}) равнялись нулю:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Если в полученной матрице $a_{22} \neq 0$ (в данном случае $a_{22} = -1 \neq 0$), то, умножая элементы 3-й и 4-й строк на подходящие числа (а именно на $-a_{32}/a_{22} = -3$, $-a_{42}/a_{22} = -3$), добьемся того, чтобы все элементы 2-го столбца (кроме a_{12} , a_{22}) равнялись нулю. Если в процессе преобразований получаются строки (или столбцы), целиком состоящие из нулей (как в данном примере), то отбрасываем эти строки (или столбцы):

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица имеет ступенчатый вид и содержит миноры второго порядка, не равные нулю, например $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Поэтому ранг полученной ступенчатой, а, следовательно, и данной матрицы равен двум.

Задания для решения в аудитории

Найти ранг матрицы:

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 & 4 & 18 \\ -3 & 18 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 7 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

$$3) A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & -2 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

где A – матрица коэффициентов при переменных, или матрица системы, X – матрица-столбец переменных; B – матрица-столбец свободных членов.

Так как число столбцов матрицы $A_{m \times n}$ равно числу строк матрицы $X_{n \times 1}$,

их произведение $AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$ есть матрица-столбец.

Элементами полученной матрицы являются левые части системы (1). На основании определения равенства матриц систему (1) можно записать в виде:

$$AX = B. \quad (2)$$

Пусть число уравнений системы (1) равно числу переменных, т.е. $m = n$. Тогда матрица системы является квадратной, а ее определитель $\Delta = |A|$ называется **определителем системы**.

Для получения решения системы (1) при $m = n$ предположим, что квадратная матрица системы $A_{n \times n}$ невырожденная, т.е. ее определитель $|A| \neq 0$. В этом случае существует обратная матрица A^{-1} .

Умножая слева обе части матричного равенства (2) на матрицу A^{-1} , получим $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$. Так как $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X$, то решением системы методом обратной матрицы будет матрица-столбец:

$$X = A^{-1}B \quad (3)$$

Теорема Крамера. Пусть Δ - определитель матрицы системы (2), а Δ_j - определитель матрицы, получаемой из матрицы A заменой j -го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j=1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Формулы (4) получили название формул Крамера.

Метод Гаусса – метод последовательного исключения переменных – заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или

треугольного) вида. Из нее последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

При решении методом Гаусса можно:

- переставлять местами два любых уравнения системы;
- умножать обе части уравнения на произвольное, отличное от нуля число;
- прибавлять к обеим частям одного уравнения соответствующие части другого, умноженного на какое-то постоянное число.

Система обычно решается с помощью преобразований расширенной матрицы (матрицы коэффициентов при неизвестных и свободных членов).

Если в результате преобразования матрицы:

- 1) получится строка $0\ 0\ 0\ \dots\ 0\ c$ с b – система имеет **единственное решение**:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_{n-1} + c \cdot x_n = b_i$$

- 2) появится строка, состоящая из нулей, т.е. $0\ 0\ 0\ \dots\ 0\ 0$ – система имеет **множество решений**:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$$

- 3) появится строка $0\ 0\ 0\ \dots\ 0\ b$ – система **решений не имеет**:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b$$

Решение типовых примеров

Пример 1. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$
 а) методом

обратной матрицы; б) по формулам Крамера.

Решение. а) Обозначим $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Тогда в матричной форме данная система имеет вид $AX=B$. Найдем определитель $|A|=5$. Так как $|A| \neq 0$, матрица A – невырожденная, и существует обратная матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}; X = A^{-1}B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. решение системы (4; 2; 1).

б) Найдем определитель системы $\Delta = |A| = 5$. Так как $\Delta \neq 0$, по теореме Крамера система имеет единственное решение.

Вычислим определители матриц $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, полученных из матриц A , заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 10; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 5.$$

Теперь по формулам Крамера (4):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{5} = 4; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1,$$

т.е. решение системы (4; 2; 1).

Пример 2. Методом Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (-1) \quad (-5) \\ \searrow \quad \searrow \\ \searrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 5 & -3 & 2 & | & 5 \\ 1 & 3 & 3 & | & 18 \end{pmatrix} \sim (-2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 2 & -8 & | & 0 \\ 0 & 4 & 1 & | & 17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 2 & -8 & | & 0 \\ 0 & 0 & 17 & | & 17 \end{pmatrix}$$

$$0 \quad 0 \quad c \quad b$$

Запишем полученную систему треугольного вида

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 & x_1 - 4 + 2 = 1 & \underline{x_1 = 3} \\ 2x_2 - 8x_3 = 0 & 2x_2 - 8 \cdot 1 = 0 & 2x_2 = 8 & \underline{x_2 = 4} \\ 17x_3 = 17 & & & \underline{x_3 = 1} \end{cases}$$

Ответ: (3, 4, 1)

Пример 3. Решить методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы имеет вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array} \right).$$

Шаг 1. Так как $a_{11} \neq 0$, исключим переменную x_1 из всех строк, начиная со второй, умножая вторую, третью и четвертую строки матрицы на числа (-2) , (-3) , (-2) и прибавляя полученные строки соответственно ко второй, третьей, четвертой строкам.

Заметив, что в новой матрице $a_{22}^{(1)} = 0$, поменяем местами вторую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 20 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array} \right).$$

Шаг 2. Так как теперь $a_{22}^{(1)} = -4 \neq 0$, исключим переменную x_2 из всех строк, начиная с третьей, умножая вторую строку на $(-7/4)$ и прибавляя полученную строку к четвертой:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13,5 & 9 & 4,5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{117}{16} & \frac{117}{8} \end{array} \right).$$

Шаг 3. Учитывая, что $a_{33}^{(2)} = -8 \neq 0$, умножаем третью строку на $13,5/8 = 27/16$ и, прибавляя полученную строку к четвертой, исключим из нее переменную x_3 . Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -4x_2 - 10x_3 + 8x_4 = -14, \\ -8x_3 + x_4 = 6, \\ -\frac{117}{16}x_4 = \frac{117}{8}, \end{cases}$$

откуда, используя обратный ход метода Гаусса, найдем из четвертого уравнения $x_4 = -2$; из третьего $x_3 = \frac{6 - x_4}{-8} = \frac{6 + 2}{-8} = -1$; из второго

$$x_2 = \frac{-14 - 8x_4 + 10x_3}{-4} = \frac{-14 - 8(-2) + 10(-1)}{-4} = 2 \text{ и из первого уравнения}$$

$x_1 = 6 + 2x_4 - 3x_3 - 2x_2 = 6 + (-2) - 3(-1) - 2 \cdot 2 = 1$, т.е. решение системы $(1; 2; -1; 2)$.

Пример 4. Решить методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 16 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Итак, уравнение, соответствующее третьей строке последней матрицы, противоречно – оно привелось к неверному равенству $0 = -1$, следовательно, данная система несовместна.

Задания для решения в аудитории

Решить систему линейных уравнений матричным методом, по формулам Крамера и методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} x + y - z = 36 \\ x - y + z = 13 \\ -x + y + z = 7. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 4x + y + z = 5 \\ 6x + 3y + 4z = 1 \\ 7x + 2y + 5z = 2 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ 2x + y - 5z = -1 \\ x - y - z = -2 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ x - 3y - 2z = 3 \end{cases}$$

ГЛАВА 3 ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

3.1 Линейные операции над векторами. Линейная зависимость векторов

Определение 1. Геометрическим вектором, или просто вектором, называется **направленный отрезок**.

Вектор обозначается символом \overline{AB} , где точки A и B - начало и конец данного вектора, либо \vec{a} . Начало вектора называют **точкой его приложения**.

Определение 2. Вектор называется **нулевым**, если начало и конец его совпадают.

Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю. Это позволяет при записи отождествлять нулевой вектор с вещественным числом нуль.

Определение 3. Векторы называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Определение 4. Три вектора называются **компланарными**, если они лежат в одной плоскости.

Определение 5. Два вектора называются **равными**, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление.

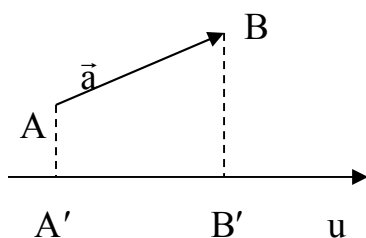
Все нулевые векторы считаются равными.

Определение 6. Суммой $\vec{a} + \vec{b}$ двух векторов \vec{a} и \vec{b} называется **вектор**, идущий из начала вектора \vec{a} в конец вектора \vec{b} при условии, что вектор \vec{b} приложен к концу вектора \vec{a} .

Определение 7. Разностью $\vec{a} - \vec{b}$ вектора \vec{a} и вектора \vec{b} называется такой **вектор** \vec{c} , который в сумме с вектором \vec{b} дает вектор \vec{a} .

Определение 8. Произведением $\alpha\vec{a}$ вектора \vec{a} на действительное число α называется вектор \vec{b} , коллинеарный вектору \vec{a} , имеющий длину, равную $|\alpha| \cdot |\vec{a}|$, и имеющий направление, совпадающее с направлением вектора \vec{a} при $\alpha > 0$ и противоположное направлению вектора \vec{a} при $\alpha < 0$.

Обозначим буквами A' и B' основания перпендикуляров, опущенных на ось u из точек A и B соответственно.



Определение 9. Проекцией вектора $\vec{a} = \overline{AB}$ на ось u называется величина $A'B'$ направленного отрезка $\overline{A'B'}$ оси u и обозначается $\text{пр}_u \vec{a}$.
 $\text{пр}_u \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$, где φ - угол между вектором \vec{a} и осью u .

Любой вектор \vec{a} может быть разложен по декартову прямоугольному базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Числа x, y, z - называется декартовыми прямоугольными координатами вектора \vec{a} . Обозначим буквами α, β и γ углы наклона вектора \vec{a} к осям координат; $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ называются направляющими косинусами вектора \vec{a} .

Длина вектора через его координаты имеет вид:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Направляющие косинусы вектора вычисляются по формулам:

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

откуда следует $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Определение 10. Ортом вектора \vec{a} называется вектор \vec{a}^0 , удовлетворяющий условиям:

- 1) \vec{a}^0 коллинеарен вектору \vec{a} ,
- 2) $|\vec{a}^0| = 1$.

Координатами орта вектора являются направляющие косинусы.

Если два вектора \vec{a}_1 и \vec{a}_2 заданы в декартовых прямоугольных координат $\vec{a}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{a}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, то:

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k},$$

$$\alpha\vec{a} = (\alpha x_1)\vec{i} + (\alpha y_1)\vec{j} + (\alpha z_1)\vec{k}.$$

Условие коллинеарности векторов имеет вид:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Решение типовых примеров

Задача 1. Найти вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, если $\vec{a} = (2; 3; -1)$, $\vec{b} = (5; 9; 7)$.

Решение. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (2+5; 3+9; -1+7) = (7; 12; 6)$.

Задача 2. Найти вектор $\vec{d} = 4\vec{p} + 5\vec{q}$, если $\vec{p} = (4; 5; -6)$, $\vec{q} = (8; 2; 1)$.

Решение. $4\vec{p} = (4 \times 4; 5 \times 4; -6 \times 4) = (16; 20; -24)$

$$5\vec{q} = (8 \times 5; 2 \times 5; 1 \times 5) = (40; 10; 5)$$

Тогда:

$$\vec{d} = 4\vec{p} + 5\vec{q} = (16 + 40; 20 + 10; -24 + 5) = (56; 30; -19).$$

Задача 3. Разложить вектор $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по трем некопланарным векторам: $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{r} = 2\vec{b} + 3\vec{c}$.

Решение. $\vec{S} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q} + \gamma\vec{r}$.

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \alpha(\vec{a} + \vec{b}) + \beta(\vec{a} - \vec{b}) + \gamma(2\vec{b} + 3\vec{c}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} + \beta\vec{a} - \beta\vec{b} + 2\gamma\vec{b} + 3\gamma\vec{c}.$$

Приравняем коэффициенты справа и слева:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1, \\ \alpha - \beta + 2\gamma = 1, \text{ тогда } \alpha = \frac{2}{5}; \beta = \frac{3}{5}; \gamma = \frac{3}{5} \text{ и } \vec{S} = \frac{2}{5}\vec{p} + \frac{3}{5}\vec{q} + \frac{3}{5}\vec{r}. \\ -2\alpha + 3\gamma = 1, \end{cases}$$

Задача 4. Даны точки $A(1; 7; 0)$, $B(5; 7; 3)$, $C(7; 6; 5)$. Разложить вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ по ортам \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} и найти его длину, направляющие косинусы, орт вектора \vec{a} .

Решение. Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{AC} = (7 - 1; 6 - 7; 5 - 0) = (6; -1; 5)$$

$$\overrightarrow{BC} = (7 - 5; 6 - 7; 5 - 3) = (2; -1; 2).$$

$$\text{Вектор } \vec{a} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = (6 - 2; -1 - (-1); 5 - 2) = (4; 0; 3).$$

Тогда $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 0 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$, следовательно,

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos \beta = 0, \quad \cos \gamma = \frac{3}{5}, \quad \vec{a} = \left\{ \frac{4}{5}; 0; \frac{3}{5} \right\}.$$

Задания для решения в аудитории

1. Найти вектор $\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b}$, если $\vec{a} = (-4; 13; 1)$, $\vec{b} = (2; 3; 4)$.

2. Найти вектор $\vec{p} = 7\vec{m} + 9\vec{n}$, если $\vec{m} = (7; 1; -25)$, $\vec{n} = (21; -3; -8)$.

3. Разложить вектор $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по трем некопланарным векторам:
 $\vec{p} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{r} = 4\vec{b} + 5\vec{c}$.

4. Даны точки $A(-2;3;6)$, $B(1;2;5)$, $C(-2;7;3)$. Разложить вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ по ортам \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} и найти его длину, направляющие косинусы, орт вектора \vec{a} .

3.2 Скалярное произведение векторов

Определение 11. Скалярным произведением ненулевых векторов \vec{a} и \vec{b} называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

Модулем вектора $\vec{a} = (x; y; z)$ (или длиной вектора \vec{a}) называется корень квадратный из суммы квадратов координат вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Свойства скалярного произведения:

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ - произведение векторов коммутативно.
- 2) Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля:

$$\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$$

$$\bar{a}^2 = \bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\bar{a}|^2 \Rightarrow \boxed{|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2}}$$

3) Если $\bar{a} \perp \bar{b}$, то их скалярное произведение равно нулю:

$$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} = 0}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos 90^\circ = 0$$

$$\bar{i} \cdot \bar{i} = |\bar{i}|^2 = 1; \quad \bar{i} \cdot \bar{j} = |\bar{i}| \cdot |\bar{j}| \cdot \cos 90^\circ = 0$$

Причем, произведение одноименных орт равно единице, а разноименных орт равно нулю (см. таблицу):

	\bar{i}	\bar{j}	\bar{k}
\bar{i}	1	0	0
\bar{j}	0	1	0
\bar{k}	0	0	1

4) Скалярное произведение векторов, заданных координатами равно сумме произведений одноименных координат:

$$(x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \cdot \bar{j} + z_1 \cdot \bar{k}) \cdot (x_2 \cdot \bar{i} + y_2 \cdot \bar{j} + z_2 \cdot \bar{k}) =$$

$$= x_1 \cdot \bar{i} \cdot x_2 \cdot \bar{i} + \cancel{x_1 \cdot \bar{i} \cdot y_2 \cdot \bar{j}} + \cancel{x_1 \cdot \bar{i} \cdot z_2 \cdot \bar{k}} + \cancel{y_1 \cdot \bar{j} \cdot x_2 \cdot \bar{i}} + y_1 \cdot \bar{j} \cdot y_2 \cdot \bar{j} +$$

$$+ \cancel{y_1 \cdot \bar{j} \cdot z_2 \cdot \bar{k}} + \cancel{z_1 \cdot \bar{k} \cdot x_2 \cdot \bar{i}} + \cancel{z_1 \cdot \bar{k} \cdot y_2 \cdot \bar{j}} + z_1 \cdot \bar{k} \cdot z_2 \cdot \bar{k} =$$

$$= \boxed{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}$$

5) Из формулы скалярного произведения векторов можно найти косинус угла между двумя векторами: $\cos \alpha = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$

$$\text{В координатной форме: } \cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Решение типовых примеров

Задача 1. Перпендикулярны ли два вектора $\bar{a} = (3; -2; 6)$; $\bar{b} = (7; 4; 9)$.

Найти угол между векторами \bar{a} и \bar{b} .

Решение. $3 \cdot 7 + (-2) \cdot 4 + 6 \cdot 9 = 21 - 8 + 54 = 67 \neq 0$, следовательно, векторы \vec{a} и \vec{b} не перпендикулярны.

Задача 2. Даны два вектора $\vec{a} = (1; 2; -2)$; $\vec{b} = (2; -1; 2)$. Найти угол между векторами \vec{a} и \vec{b} .

Решение. $\cos \varphi = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = -\frac{4}{3 \cdot 3} = -\frac{4}{9}$

Тогда: $\varphi = \pm \arccos\left(-\frac{4}{9}\right) + 2\pi n = \pm(\pi - \arccos\frac{4}{9}) + 2\pi n, n \in Z$

Задача 3. Найти угол α между векторами $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a} = (4; 1; -2)$; $\vec{b} = (1; 2; 3)$.

Решение. Зная, что $\cos \varphi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}| \cdot |\vec{q}|}$, определим координаты векторов \vec{p} и \vec{q} :

$$\vec{p} = (2 \cdot 4 + 1; 2 \cdot 1 + 2; 2 \cdot (-2) + 3) = (9; 4; -1)$$

$$\vec{q} = (4 - 1; 1 - 2; -2 - 3) = (3; -1; -5).$$

Найдем скалярное произведение векторов по их координатам:

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = 9 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-5) = 27 - 4 + 5 = 28$$

Их длины равны:

$$|\vec{p}| = \sqrt{9^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{81 + 16 + 1} = \sqrt{98}$$

$$|\vec{q}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 1 + 25} = \sqrt{35}$$

Тогда, $\cos \varphi = \frac{28}{\sqrt{98} \cdot \sqrt{35}} = \frac{28}{\sqrt{3430}}$,

следовательно, $\alpha = \pm \arccos \frac{28}{\sqrt{3430}} + 2\pi n, n \in Z$.

Задания для решения в аудитории

1. Перпендикулярны ли векторы:

а) $\vec{a} = (7; -3; 2)$; $\vec{b} = (1; 7; 7)$

б) $\vec{a} = (10; 6; 2)$; $\vec{b} = (2; 3; 1)$

в) $\vec{a} = (-4; 9; 5)$; $\vec{b} = (4; -9; -5)$

2. Даны два вектора $\vec{a} = (7; 1; -25)$, $\vec{b} = (21; -3; -8)$. Найти угол между векторами \vec{a} и \vec{b} .

3. Даны вершины треугольника. Определить его внутренние углы, если $A=(2; 5; 4)$, $B=(3; 1; -5)$, $C=(0; -7; 1)$.

4. Раскрыть скобки в выражении $(2i - j) \cdot j + (j - 2k) \cdot k + (i - 2k)^2$

ГЛАВА 4 АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

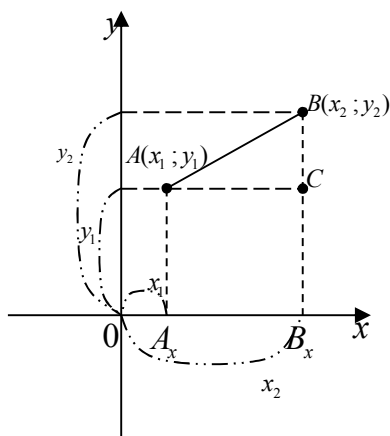
4.1 Понятие уравнения линии. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении

Линия – геометрическое место точек (совокупность точек), обладающих определенным свойством.

Произвольная точка M линии называется **текущей точкой** линии, а ее координаты – **текущими координатами**.

Уравнение, связывающее переменные x и y , называется **уравнением линии**, если ему удовлетворяют координаты любой точки линии и только они.

Пусть в прямоугольной системе координат заданы две точки с координатами $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Найдем расстояние между ними.



Из $\triangle ABC$ по теореме Пифагора имеем:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}, \text{ но } AC = A_x B_x = |x_2 - x_1|; \quad CB = A_y B_y = |y_2 - y_1|.$$

Подставим в формулу: $AB = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$ или

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

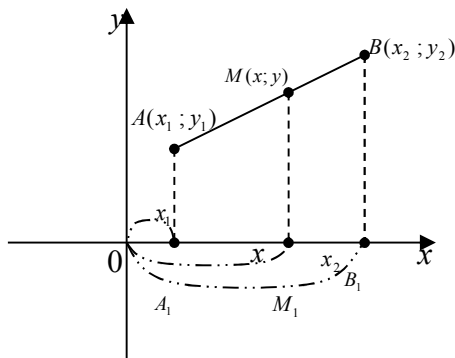
Значит, **расстояние между двумя точками** равно корню квадратному из суммы квадратов разностей соответствующих координат.

Пример: Определить расстояние между двумя точками $A(2; 3)$; $B(5; -1)$.

$$AB = \sqrt{(5 - 2)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Пусть даны точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Найти координаты третьей точки M , которая делит отрезок AB так, что отношение $\frac{AM}{MB}$ равно

положительному числу λ .



Составим пропорцию: $\frac{AM}{MB} = \frac{A_1M_1}{M_1B_1}$

Т.к. $\frac{AM}{MB} = \lambda$, $A_1M_1 = x - x_1$ и $M_1B_1 = x_2 - x$,

то получим:

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \quad ; \quad x_2\lambda - x\lambda = x - x_1$$

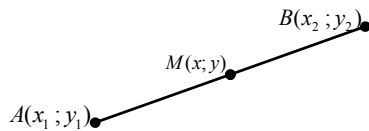
Перегруппируем: $x + x\lambda = x_2\lambda + x_1$; $x(1 + \lambda) = x_1 + x_2\lambda$.

Отсюда: $x = \frac{x_1 + x_2\lambda}{1 + \lambda}$.

Совершенно аналогично можно получить $y = \frac{y_1 + y_2\lambda}{1 + \lambda}$.

Замечания:

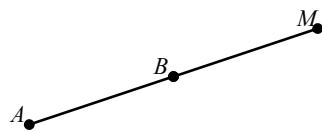
1)



Если $\frac{AM}{MB} = \lambda > 0$, то точка M делит отрезок

AB внутренним образом.

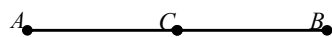
2)



Если $\frac{AM}{MB} = \lambda < 0$, то точка M делит отрезок

AB внешним образом.

3)



Пусть делящая точка является серединой

отрезка AB . Следовательно, $\frac{AC}{CB} = 1$. Тогда $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ и $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$, т. е.

координаты середины отрезка равны полусумме координат концов отрезка.

Для того чтобы найти *точки пересечения двух линий*, достаточно совместно решить систему двух уравнений этих линий.

4.2 Прямая линия на плоскости

Прямая линия l задается уравнением первой степени относительно x и y .

$$l: Ax + By + C = 0. \quad (1)$$

Это общее уравнение прямой l . Здесь коэффициенты A и B есть координаты нормального вектора $\vec{N} = (A, B)$ (рис. 1).

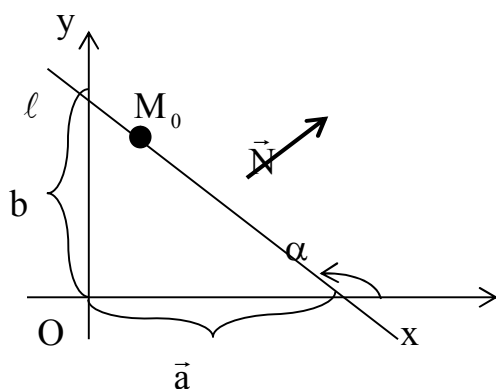


Рис. 1

Существуют другие виды уравнения прямой l . Так, решив уравнения (1) относительно y , получим (если $B \neq 0$):

$$l: y = kx + b, \quad k = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}.$$

Это уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Здесь $k = \operatorname{tg} \alpha$ - угловой коэффициент прямой, b - величина отрезка, отсекаемого прямой на оси OY (рис. 1). Если $C \neq 0$, то уравнение (1) можно записать в форме: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Здесь a и b - величины отрезков, которые прямая l отсекает на осях OX и OY (рис. 1).

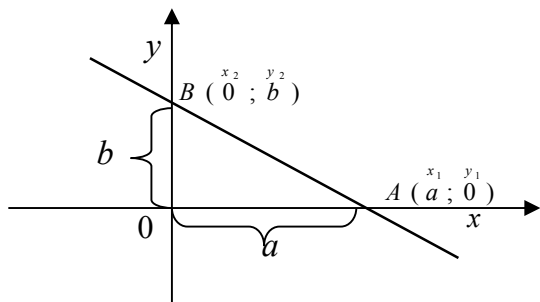
Если *прямая проходит через две заданные точки* $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, то ее уравнение имеет вид:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Пусть нам дана точка $A(x_0; y_0)$ и угловой коэффициент прямой k . Возьмем уравнение прямой с угловым коэффициентом $y = kx + b$. Так как точка $A \in l$, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению, следовательно, $y_0 = kx_0 + b$. Вычтем из (1)-го уравнения (2)-е, получим:

$$\begin{aligned} y &= kx + b \\ y_0 &= kx_0 + b \end{aligned} \Rightarrow y - y_0 = k(x - x_0) \text{ - уравнение пучка прямых.}$$

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки. Подставим в него вместо $(x_1; y_1)$ координаты точки A , а вместо $(x_2; y_2)$ координаты точки B .



Получим: $\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a}$;

$$\frac{y}{b} = \frac{x-a}{-a} ; \frac{y}{b} = \frac{x}{-a} + 1, \frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1.$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 - \text{уравнение прямой в отрезках на осях,}$$

где a и b – отрезки, отсекаемые прямой на осях OX и OY .

Если у двух пересекающихся прямых l_1 и l_2 известны угловые коэффициенты k_1 и k_2 , то можно найти угол между двумя прямыми:

$\text{tg } \alpha_1 = k_1$; $\text{tg } \alpha_2 = k_2$; $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$; $\text{tg } \alpha = \text{tg}(\alpha_2 - \alpha_1)$, а по формуле тангенса разности имеем:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{tg } \alpha_2 - \text{tg } \alpha_1}{1 + \text{tg } \alpha_2 \cdot \text{tg } \alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

или

$$\text{tg } \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|.$$

Частные случаи:

1) Пусть $l_1 \parallel l_2$, тогда угол между ними равен нулю ($\alpha = 0$). Тогда:

$$\begin{aligned} \text{tg } \alpha = 0 & ; \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow k_2 - k_1 = 0 & ; \boxed{k_1 = k_2} \end{aligned}$$

т.е., если угловые коэффициенты равны, то прямые параллельны.

2) Пусть $l_1 \perp l_2$, тогда $\alpha = 90^\circ$, а тангенс 90° - не существует.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \text{не существует} & \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 + k_1 \cdot k_2 = 0 & \Rightarrow \boxed{k_2 = -\frac{1}{k_1}} \end{aligned}$$

т.е. если угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку, то прямые перпендикулярны.

3) Возможны следующие расположения прямых $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$:

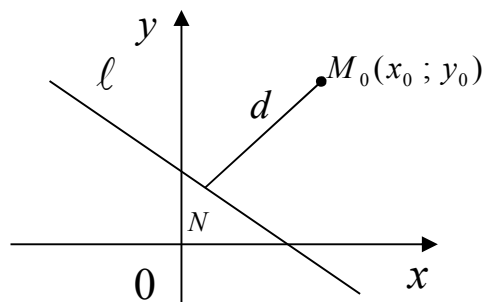
а) если $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, то прямые пересекаются;

б) если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, то прямые параллельны;

в) если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, то прямые совпадают.

4.3 Расстояние от точки до прямой

Под расстоянием от точки M_0 до прямой l понимают длину перпендикуляра $M_0N = d$, опущенного из точки M на прямую l .



$M_0 \notin l$; $l: Ax + By + C = 0$, тогда:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Решение типовых примеров

Задача 1. Написать уравнение прямой l , проходящей через точки $M_1(-1;4)$ и $M_2(5;2)$. Найти угловой коэффициент прямой l и отрезки, которые она отсекает на осях координат.

Решение.

$$\frac{x+1}{5+1} = \frac{y-4}{2-4}, \quad \frac{x+1}{6} = \frac{y-4}{-2}, \quad -2x-2 = 6y-24, \quad x+3y-11=0 \quad - \quad \text{общее}$$

уравнение прямой. Отсюда следует, что $3y = -x + 11$ или $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$ -

уравнение прямой с угловым коэффициентом. Здесь $k = -\frac{1}{3}$. Из уравнения

$$x + 3y - 11 = 0 \Rightarrow x + 3y = 11, \quad \frac{x}{11} + \frac{3y}{11} = 1, \quad \frac{x}{11} + \frac{y}{11/3} = 1. \text{ Итак, } a=11, b=\frac{11}{3}.$$

Задача 2. Найти угол между прямыми $l_1: x + 2y + 6 = 0$ и $l_2: 3x + y - 2 = 0$.

Решение. Так как $l_1: y = -1/2x - 3$, то $k_1 = -1/2$. Аналогично, $l_2: y = -3x + 2$, то $k_2 = -3$.

Тогда

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{-3 + 1/2}{1 + (-3) \cdot (-1/2)} = -1, \quad \Theta = 135^\circ.$$

Задача 3. Совпадают, параллельны или пересекаются следующие прямые:

а) $l_1: 2x + y - 1 = 0$ и $l_2: x + 5y + 5 = 0$;

б) $l_1: -x + 6y + 2 = 0$ и $l_2: x - 6y - 2 = 0$;

в) $l_1: 3x + 6y + 7 = 0$ и $l_2: x + 2y + 14 = 0$.

Решение. Найдем соотношение соответствующих коэффициентов прямых:

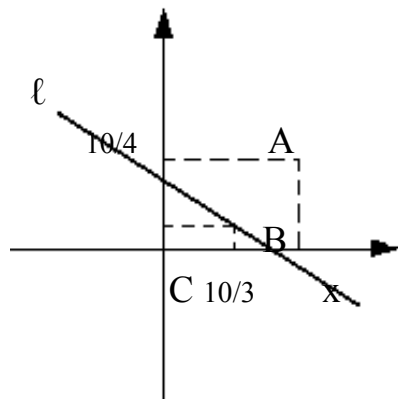
а) $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{5}$, следовательно, прямые пересекаются;

б) $\frac{-1}{1} = \frac{6}{-6} = \frac{2}{-2}$, следовательно, прямые совпадают;

в) $\frac{3}{1} = \frac{6}{2} \neq \frac{7}{14}$, следовательно, прямые параллельны.

Задача 4. Найти расстояние от точек $A(4;3)$, $B(2;1)$ и $C(1;0)$ до прямой $3x + 4y - 10 = 0$. Построить точки и прямую.

Решение. $A=3$, $B=4$, $C=-10$



$$d_A = \frac{|3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 - 10|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|12+12-10|}{5} = \frac{14}{5}$$

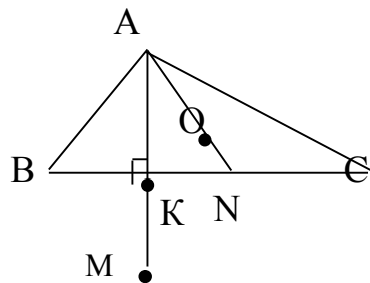
$$d_B = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 10|}{5} = 0$$

$$d_C = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 - 10|}{5} = \frac{7}{5}$$

Уравнение данной прямой в отрезках $\ell : \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

Задача 5. Даны координаты вершин треугольника $A(2, 5)$, $B(5, 1)$, $C(11, 3)$.

- 1) Вычислить длину стороны BC .
- 2) Составить уравнения сторон AB и BC .
- 3) Найти точку пересечения медиан.
- 4) Найти тангенс угла B .
- 5) Составить уравнение высоты, проведенной из вершины A , и найти ее длину.
- 6) Найти координаты точки M , расположенной симметрично точке A , относительно прямой BC .



Решение.

- 1) Длину стороны BC определим как расстояние между двумя точками:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \text{ тогда } |BC| = \sqrt{(11-5)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

- 2) Уравнение прямой BC : $\frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B}; \quad \frac{x - 5}{6} = \frac{y - 1}{2};$

$$x - 3y - 2 = 0.$$

Уравнение прямой AB : $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}; \quad \frac{x - 2}{3} = \frac{y - 5}{-4}; \quad 4x + 3y - 23 = 0.$

- 3) Найдем координаты точки N – середины стороны BC :

$$x_N = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{5 + 11}{2} = 8; \quad y_N = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2; \quad N(8, 2).$$

Точка пересечения медиан O делит каждую медиану на отрезки в отношении $\lambda = 2:1$.

Используем формулы деления отрезка в данном отношении λ :

$$x_0 = \frac{x_A + \lambda x_N}{1 + \lambda}; \quad y_0 = \frac{y_A + \lambda y_N}{1 + \lambda};$$

$$x_0 = \frac{2 + 2 \cdot 8}{3} = 6; \quad y_0 = \frac{5 + 2 \cdot 2}{3} = \frac{9}{3} = 3; \quad O(6, 3).$$

4) Тангенс угла при вершине B найдем по формуле $\operatorname{tg} \angle B = \frac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{AB} \cdot k_{BC}}$.

Уравнение прямой BC : $x - 3y - 2 = 0$, тогда $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$, $k_{BC} = \frac{1}{3}$.

Уравнение прямой AB : $4x + 3y - 23 = 0$, тогда $y = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{3}$, $k_{AB} = -\frac{4}{3}$.

$$\operatorname{tg} \angle B = \frac{-\frac{4}{3} - \frac{1}{3}}{1 + (-\frac{4}{3}) \cdot \frac{1}{3}} = \frac{-\frac{5}{3}}{\frac{5}{9}} = -\frac{9}{3} = -3.$$

5) Уравнение высоты AK запишем как уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,5)$ перпендикулярно прямой BC . Так как $AK \perp BC$, то

$$k_{AK} = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{1}{\frac{1}{3}} = -3.$$

Тогда уравнение AK найдем по формуле: $y - y_A = k_{AK}(x - x_A)$.

$$y - 5 = -3(x - 2), \quad y + 3x - 11 = 0.$$

Длину высоты AK можно найти как расстояние от точки A до прямой BC : $|AK| = d = \frac{|1 \cdot 2 - 3 \cdot 5 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{15}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$.

6) Точка M , симметричная точке A относительно прямой BC , расположена на прямой AK , перпендикулярной к прямой BC , на таком же расстоянии от прямой, как и точка A . Координаты точки K найдем как

решение системы $\begin{cases} x - 3y - 2 = 0, \\ 3x + y - 11 = 0. \end{cases}$ Систему решим по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 10;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 11 & 1 \end{vmatrix} = 35;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 5;$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{35}{10} = \frac{7}{2}; y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}; \text{ следовательно, } K\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Точка К является серединой отрезка АМ.

$$x_K = \frac{x_A + x_M}{2}; \frac{7}{2} = \frac{2 + x_M}{2}; x_M = 5; y_K = \frac{y_A + y_M}{2}; \frac{1}{2} = \frac{5 + y_M}{2}; y_M = -4;$$

М(5, -4).

Задания для решения в аудитории

1. Прямая ℓ проходит через точки $M_1(5;7)$ и $M_2(-3;12)$. Написать уравнение прямой ℓ . Найти угловой коэффициент и отрезки, которые она отсекает на осях координат.

2. Даны две прямые $\ell_1: 5x - 7y - 1 = 0$ и $\ell_2: y - 2x = 10$. Найти угол между этими прямыми.

3. Определить взаимное расположение прямых:

а) $l_1: 6x + 2y - 7 = 0$ и $l_2: 3x + y - 3,5 = 0$;

б) $l_1: x + y + 12 = 0$ и $l_2: x - y + 3 = 0$;

в) $l_1: -5x + 2y + 7 = 0$ и $l_2: 5x - 2y + 7 = 0$.

4. Найти расстояние от точек $A(2;-6)$, $B(5;1)$ и $C(0;3)$ до прямой $-5x + 2y + 7 = 0$.

5. Даны координаты вершин треугольника $A(1; 4)$, $B(-3;0)$, $C(5;9)$.

1) Вычислить длину стороны BC .

2) Составить уравнения сторон AB и BC .

3) Найти точку пересечения медиан.

4) Найти тангенс угла B .

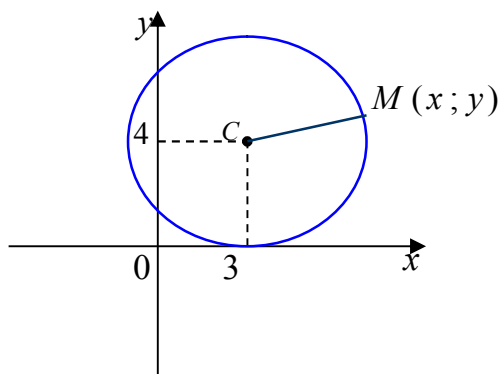
5) Составить уравнение высоты, проведенной из вершины A , и найти ее длину.

6) Найти координаты точки M , расположенной симметрично точке A , относительно прямой BC .

4.4 Кривые второго порядка

Линии, описываемые уравнениями второй степени относительно x и y , называются кривыми второго порядка. К ним относятся окружность, эллипс, гипербола и парабола.

Окружность.



Уравнение окружности с центром в точке $C(a; b)$ и радиусом R имеет вид:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \quad -$$

нормальное уравнение окружности.

Если центр окружности находится в начале координат, то $a = b = 0$ и уравнение примет вид:

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad - \text{каноническое уравнение окружности}$$

Эллипс.

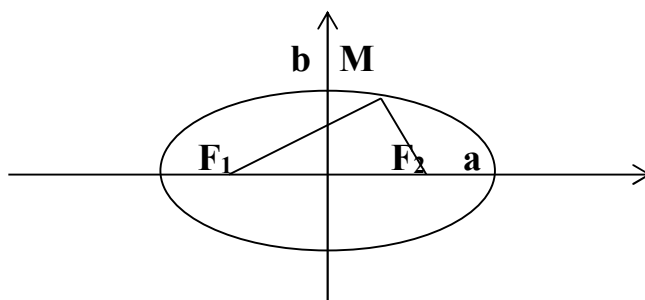
Множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$, называется *эллипсом*.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad - \text{каноническое уравнение эллипса,}$$

где a – большая полуось;

b – малая полуось.

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad - \text{нормальное уравнение эллипса.}$$



F_1, F_2 – фокусы. $F_1 = (c; 0)$; $F_2 = (-c; 0)$

c – половина расстояния между фокусами;

Фокусное расстояние и полуоси эллипса связаны соотношением:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Форма эллипса определяется характеристикой, которая является отношением фокусного расстояния к большей оси и называется эксцентриситетом: $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Т.к. $c < a$, то $\varepsilon < 1$.

Гипербола.

Множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний, которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная равная $2a$, называется *гиперболой*.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 - \text{каноническое уравнение гиперболы,}$$

где a – действительная полуось;

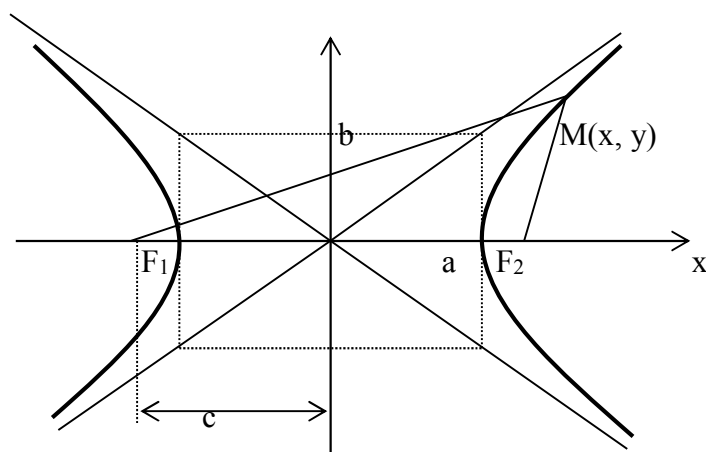
b - мнимая полуось.

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 - \text{нормальное уравнение гиперболы,}$$

$$y = \pm \frac{b}{a}x - \text{уравнение асимптот гиперболы.}$$

F_1, F_2 – фокусы гиперболы.

$$F_1F_2 = 2c. \quad c^2 = a^2 + b^2$$

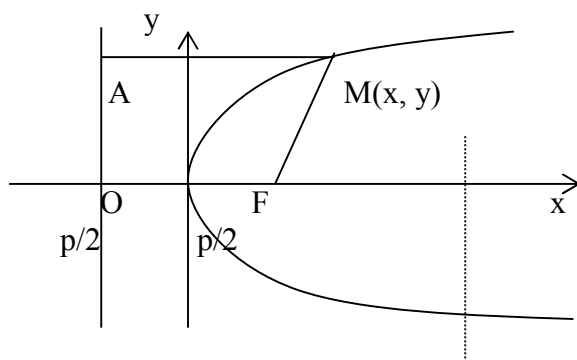


Отношение $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ называется эксцентриситетом гиперболы, где c – половина расстояния между фокусами, a – действительная полуось.

Парабола.

Множество точек плоскости, равноудаленных от одной точки, называемой фокусом, и одной прямой, называемой директрисой, называется *параболой*.

Расположим начало координат посередине между фокусом и директрисой.



$$y^2 = 2px \quad - \text{ каноническое уравнение параболы}$$

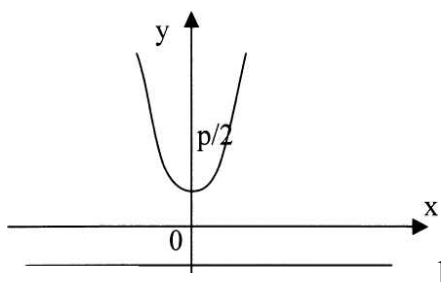
$$(y - b)^2 = 2p(x - a) \quad - \text{ уравнение параболы со смещенной вершиной (нормальное уравнение параболы)}$$

Величина p (расстояние от фокуса до директрисы) называется **параметром** параболы.

Уравнение директрисы: $x = -p/2$.

Фокус параболы $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.

$x^2 = 2py$ - парабола, симметричная относительно оси OY .



$$y = -\frac{p}{2} \quad - \text{ директриса}$$

Эксцентриситет параболы считается равным 1.

Задания для решения в аудитории

1. Составить уравнение окружности, если окружность проходит через $A(2;6)$ и ее центр совпадает с точкой $C(-1;2)$.

2. Найти точки пересечения окружности радиуса $R=2$ с центром в начале координат и прямой $x-2y+2=0$.

3. Составить уравнение касательной к окружности $x^2+y^2=5$ в точке $A(-1;2)$.

4. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

а) его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами $2c=8$;

б) его большая ось равна 20, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$.

5. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти:

- 1) его полуоси;
- 2) фокусы;
- 3) эксцентриситет;
- 4) уравнения директрис.

6. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, что:

- 1) $2c = 10$, $2b = 8$
- 2) $2a = 16$, $\varepsilon = \frac{5}{4}$
- 3) $y = \pm \frac{4}{3}x$ - уравнения асимптот, $2c = 20$.
- 4) расстояние между директрисами равно $22\frac{2}{13}$ и $2c = 26$
- 5) уравнения асимптот $y = \pm \frac{3}{4}x$ и расстояние между директрисами равно $12\frac{4}{5}$.

7. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

1) парабола расположена симметрично относительно оси Ox и проходит через точку $B(-1;3)$;

2) парабола расположена симметрично относительно оси Oy и проходит через точку $C(1;1)$.

8. Привести к каноническому виду. Определить вид кривой. Построить кривую.

1) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2 - x + \frac{2}{3}y - 1 = 0$

2) $2x^2 - 4x + 2y - 3 = 0$

Расчетно-графическая работа № 1
«Матрицы. Определители»
Вариант 1

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -5 \\ -6 & -4 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

Вариант 2

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 8 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

Вариант 3

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Вариант 4

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$

Вариант 5

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

Вариант 6

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix}$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & -6 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & -3 \end{pmatrix}$

Вариант 7

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & -7 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Вариант 8

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -5 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$

Вариант 9

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & 6 & 7 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

Вариант 10

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \\ 3 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Вариант 11

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -7 \\ -1 & 6 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$

Вариант 12

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

Вариант 13

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -7 & -5 & 5 \\ 1 & -8 & -8 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 9 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Вариант 14

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Вариант 15

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} -2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Вариант 16

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & -7 & 4 \\ 3 & 1 & 9 & -2 \\ 1 & -3 & -7 & 6 \end{vmatrix}$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти ранг матрицы:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант 17

Задание 1. Вычислить определители:

а)
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -5 \\ -6 & -4 & 3 \end{vmatrix};$$

б)
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

Задание 2. Умножить матрицы:

а)
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

б)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти ранг матрицы:
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Вариант 18

Задание 1. Вычислить определители:

а)
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 8 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix};$$

б)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Задание 2. Умножить матрицы:

а)
$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix};$$

б)
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

Вариант 19

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix};$

б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Вариант 20

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix};$

б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & -7 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$

Вариант 21

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix};$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

Вариант 22

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix};$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix}$

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix};$ б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & 6 & 7 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & -6 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & -3 \end{pmatrix}$

Вариант 23

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix};$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{vmatrix}$

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix};$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

Вариант 24

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix};$ б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -5 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -7 \\ -1 & 6 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$

Вариант 25

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

Вариант 26

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -7 & -5 & 5 \\ 1 & -8 & -8 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \\ 3 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Вариант 27

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$

Вариант 28

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

Вариант 29

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 9 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Вариант 30

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Расчетно-графическая работа № 2
«Системы линейных уравнений»
Вариант 1

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} x - 2y - z = -5 \\ x + 2y - 2z = 2 \\ 3x + y - 4z = -2 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ 3x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y - z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} x - 2y - 3z = -3 \\ x + 3y - 5z = 0 \\ -x + 4y + z = 3 \\ 3x + y - 13z = -6 \end{cases}$$

Вариант 2

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ 2x - 2y + 3z = 3 \\ x - y - z = 4 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} 2x - 2y + 3z = 6 \\ 3x - 2y + 4z = 7 \\ 3x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - 3y + 4z = 3 \\ 4x - 11y + 10z = 5 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} 2x + 5y - 8z = 8 \\ 4x + 3y - 9z = 9 \\ 2x + 3y - 5z = 7 \\ x + 8y - 7z = 12 \end{cases}$$

Вариант 3

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + 2y - 3z = -4 \\ x + 2y + z = 5 \\ 3x + z = -1 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} x + 3y - z = -2 \\ 2x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 4 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$a) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 2; \\ 3x + 6y + 9z = 3 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - y + 2z = 5 \\ 3x - 6y + 5z = 6 \end{cases}$$

Вариант 4

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$a) \begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 7 \quad ; \\ 3x - y - 4z = 12 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ x - y - z = -1 \\ x + 3y - z = 3 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$a) \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \quad ; \\ 3x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + 3y + z = 5 \\ x + y + 5z = -7 \\ 2x + 3y - 3z = 14 \end{cases}$$

Вариант 5

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$a) \begin{cases} x + 3y + 3z = 11 \\ x - 2y + 3z = 1 \quad ; \\ 3x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 3x - 2z = 11 \\ 2x - 2y + 3z = 3 \\ x - y + 4z = -1 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$a) \begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x + 3y - z = 3; \\ 4x - y + z = 11 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x - y + z = 0 \\ x + 3y - z = -2 \\ 3x + 4y + 3z = 0 \end{cases}$$

Вариант 6

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$a) \begin{cases} 2x + y + 3z = 3 \\ 4x + 2y + 5z = 5; \\ 3x + 4y + 7z = 2 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x + 3y + 2z = 4 \\ 2x + 6y + z = 2 \\ 4x + 8y - z = 2 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} x - 2y - 3z = -3 \\ x + 3y - 5z = 0 \\ 3x + y - 13z = -6 \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 3y + 4z = 2 \\ 11x - 12y + 17z = 3 \end{cases}$$

Вариант 7

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + 4y + z = 4 \\ 3x + 6y + 2z = 4 \\ 4x - y - 3z = 1 \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 4x + y + 4z = 9 \\ 3x + 5y + 2z = 10 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} x + 2y - 6z = 5 \\ 2x - y + 3z = -7 \\ 5x + 5y - 15z = 8 \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ 4x - 7y + z = 5 \end{cases}$$

Вариант 8

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2 \\ 4x - 5y + 2z = 1 \\ 5x - 6y + 4z = 3 \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} 3x + 2y - 4z = 8 \\ 2x + 4y - 5z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - 3y + 4z = 3 \\ 4x - 11y + 10z = 5 \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y - 3z = 13 \\ 3x - 2y + 4z = -15 \\ x - 2y + z = -1 \end{cases}$$

Вариант 9

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = -2; \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x - y - z = 1 \\ x + 3y + 4z = 6 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{a) } \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ x + 3y - z = 1 ; \\ 3x + 4y - z = 5 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x - y - 3z = 13 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x - 2y + 4z = -15 \\ x - 2y + z = -1 \end{cases}$$

Вариант 10

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x + 5y - 4z = -5; \\ 4x + y - 3z = -4 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y + 3z = -7 \\ x + 2y - 6z = -1 ; \\ -x + 5y - 15z = 8 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ 3x - y + 4z = 7 \\ 5x - 7y + 8z = 1 \end{cases}$$

Вариант 11

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x - 3y + 2z = 5; \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + y - 2z = -3 \\ 5x - 2y + 7z = 22 \\ 2x - 5y + 4z = 4 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{a) } \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 3x + 2y - 4z = 2; \\ 5x - 2y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 11y + 4z = 13 \\ 2x - 10y + 5z = 1 \end{cases}$$

Вариант 12

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y + 4z = 5; \\ 3x + y - z = 2 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x - y + z = 0 \\ x + 3y - z = -2 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x - 3y + 2z = 5 ; \\ 2x - y + 5z = 12 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x - 3y + 4z = 1 \\ 2x - y - z = -6 \\ 3x - 4y + 3z = 0 \end{cases}$$

Вариант 13

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1; \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x + y + 2z = 6 \\ 3x - z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 ; \\ 3x + 3y + 2z = 7 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + 2y - 2z = 5 \\ 2x - y - 3z = 4 \\ 3x + y - 5z = 1 \end{cases}$$

Вариант 14

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3; \\ x - y + 2z = 5 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x + 3y - z = -3 \\ 4x + y + 3z = 9 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x + 2y + z = -1 \\ 7x + 6y + 5z = 5; \\ 5x + 4y + 3z = 2 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 2x - 7y + 5z = 1 \\ 3x - 8y + 8z = 5 \end{cases}$$

Вариант 15

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 2; \\ 3x + y + z = 8 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x - 4y + z = 3 \\ x - 5y + 3z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x - 3y + 2z = 5 ; \\ 2x - y + 5z = 12 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ 3x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

Вариант 16

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3; \\ x - y + 2z = 5 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 5x + y + 3z = 14 \\ 2x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ x + 3y - z = 1 ; \\ 3x + 4y - z = 5 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ 2x - y - 2z = -4 \\ 3x + y - 4z = 1 \end{cases}$$

Вариант 17

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} x - 2y - z = -5 \\ x + 2y - 2z = 2 ; \\ 3x + y - 4z = -2 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ 3x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y - z = 3 \\ x + y + z = 1; \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x - 2y - 3z = -3 \\ x + 3y - 5z = 0 \\ -x + 4y + z = 3 \\ 3x + y - 13z = -6 \end{cases}$$

Вариант 18

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ 2x - 2y + 3z = 3; \\ x - y - z = 4 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x - 2y + 3z = 6 \\ 3x - 2y + 4z = 7 \\ 3x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - 3y + 4z = 3; \\ 4x - 11y + 10z = 5 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 3 \\ 3x + 6y + 9z = 2 \end{cases}$$

Вариант 19

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 2y - 3z = -4 \\ x + 2y + z = 5; \\ 3x + z = -1 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + 3y - z = -2 \\ 2x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 4 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 2; \\ 3x + 6y + 9z = 3 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - y + 2z = 5 \\ 3x - 6y + 5z = 6 \end{cases}$$

Вариант 20

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 7 \\ 3x - y - 4z = 12 \end{cases} ;$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ x - y - z = -1 \\ x + 3y - z = 3 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 7 \end{cases} ;$$

$$\text{б) } \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ 5x + y - z = 7 \end{cases}$$

Вариант 21

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 3y + 3z = 11 \\ x - 2y + 3z = 1 \\ 3x + 3y - z = 1 \end{cases} ;$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x - 2z = 11 \\ 2x - 2y + 3z = 3 \\ x - y + 4z = -1 \end{cases}.$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{a) } \begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ 4x - y + z = 11 \end{cases} ;$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 10 \end{cases}$$

Вариант 22

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y + 3z = 3 \\ 4x + 2y + 5z = 5 \\ 3x + 4y + 7z = 2 \end{cases} ;$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + 3y + 2z = 4 \\ 2x + 6y + z = 2 \\ 4x + 8y - z = 2 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{a) } \begin{cases} x - 2y - 3z = -3 \\ x + 3y - 5z = 0 \\ 3x + y - 13z = -6 \end{cases} ;$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 3y + 4z = 2 \\ 11x - 12y + 17z = 3 \end{cases}$$

Вариант 23

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + 4y + z = 4 \\ 3x + 6y + 2z = 4; \\ 4x - y - 3z = 1 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 4x + y + 4z = 9 \\ 3x + 5y + 2z = 10 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} x + 2y - 6z = 5 \\ 2x - y + 3z = -7; \\ 5x + 5y - 15z = 8 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ 4x - 7y + z = 5 \end{cases}$$

Вариант 24

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2 \\ 4x - 5y + 2z = 1; \\ 5x - 6y + 4z = 3 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x + 2y - 4z = 8 \\ 2x + 4y - 5z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - 3y + 4z = 3; \\ 4x - 11y + 10z = 5 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x - 5y + 2z + 4t = 2 \\ 7x - 4y + 3t = 5 \\ 5x + 7y - 4z - 6t = 3 \end{cases}$$

Вариант 25

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = -2; \\ x - 2y + z = 1 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x - y - z = 1 \\ x + 3y + 4z = 6 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ x + 3y - z = 1; \\ 3x + 4y - z = 5 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x - 5y + 2z + 4t = 2 \\ 7x - 4y + z + 3t = 5 \\ 5x + 7y - 4z - 6t = 3 \end{cases}$$

Вариант 26

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x + 5y - 4z = -5; \\ 4x + y - 3z = -4 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x - y + 3z = -7 \\ x + 2y - 6z = -1; \\ -x + 5y - 15z = 8 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ 3x - y + 4z = 7 \\ 5x - 7y + 8z = 1 \end{cases}$$

Вариант 27

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x - 3y + 2z = 5; \\ x + y + z = 3 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + y - 2z = -3 \\ 5x - 2y + 7z = 22 \\ 2x - 5y + 4z = 4 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 3x + 2y - 4z = 2; \\ 5x - 2y + 2z = 4 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 11y + 4z = 13 \\ 2x - 10y + 5z = 1 \end{cases}$$

Вариант 28

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y + 4z = 5; \\ 3x + y - z = 2 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x - y + z = 0 \\ x + 3y - z = -2 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x - 3y + 2z = 5 \\ 2x - y + 5z = 12 \end{cases};$$

$$\text{б) } \begin{cases} x - 3y + 4z = 1 \\ 2x - y - z = -6 \\ 3x - 4y + 3z = 0 \end{cases}$$

Вариант 29

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases};$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x + y + 2z = 6 \\ 3x - z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 7 \end{cases};$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + 2y - 2z = 5 \\ 2x - y - 3z = 4 \\ 3x + y - 5z = 1 \end{cases}$$

Вариант 30

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases};$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x + 3y - z = -3 \\ 4x + y + 3z = 9 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + 2y + z = -1 \\ 7x + 6y + 5z = 5 \\ 5x + 4y + 3z = 2 \end{cases};$$

$$\text{б) } \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 2x - 7y + 5z = 1 \\ 3x - 8y + 8z = 5 \end{cases}$$

Расчетно-графическая работа № 3

«Векторы»

1. Даны точки A, B и C. Разложить вектор \vec{a} по ортам \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} . Найти длину, направляющие косинусы и орт вектора \vec{a} .
- | | |
|--|--|
| 1. $A(1; 2; -1), B(1; 3; 4), C(0; 1; 5),$
$\vec{a} = \vec{AC} + \vec{BC}.$ | 2. $A(1; 2; -1), B(1; 3; 4), C(0; 1; 5),$
$\vec{a} = \vec{AB} - \vec{CB}.$ |
| 3. $A(1; 2; -1), B(1; 3; 4), C(0; 1; 5),$
$\vec{a} = \vec{AC} + \vec{AB}.$ | 4. $A(1; 2; -1), B(1; 3; 4), C(0; 1; 5),$
$\vec{a} = \vec{CB} - \vec{AC}.$ |
| 5. $A(1; 2; -1), B(1; 3; 4), C(0; 1; 5),$
$\vec{a} = \vec{AC} - \vec{AB}.$ | 6. $A(1; 2; -1), B(1; 3; 4), C(0; 1; 5),$
$\vec{a} = \vec{CA} - \vec{CB}.$ |
| 7. $A(1; 2; -1), B(1; 3; 4), C(0; 1; 5),$
$\vec{a} = \vec{AB} + \vec{CB}.$ | 8. $A(1; 2; -1), B(1; 3; 4), C(0; 1; 5),$
$\vec{a} = \vec{CB} - \vec{AB}.$ |
| 9. $A(1; 2; -1), B(1; 3; 4), C(0; 1; 5),$
$\vec{a} = \vec{AB} + \vec{CA}.$ | 10. $A(1; 2; -1), B(1; 3; 4), C(0; 1; 5),$
$\vec{a} = \vec{CB} + \vec{AC}.$ |
| 11. $A(4; 1; 0), B(2; -2; 1), C(6; 3; 1),$
$\vec{a} = \vec{AB} + \vec{BC}.$ | 12. $A(4; 1; 0), B(2; -2; 1), C(6; 3; 1),$
$\vec{a} = \vec{AB} - \vec{CB}.$ |
| 13. $A(4; 1; 0), B(2; -2; 1), C(6; 3; 1),$
$\vec{a} = \vec{AB} + \vec{AC}.$ | 14. $A(4; 1; 0), B(2; -2; 1), C(6; 3; 1),$
$\vec{a} = \vec{CB} - \vec{AC}.$ |
| 15. $A(4; 1; 0), B(2; -2; 1), C(6; 3; 1),$
$\vec{a} = \vec{AC} - \vec{AB}.$ | 16. $A(4; 1; 0), B(2; -2; 1), C(6; 3; 1),$
$\vec{a} = \vec{CA} - \vec{CB}.$ |
| 17. $A(4; 1; 0), B(2; -2; 1), C(6; 3; 1),$
$\vec{a} = \vec{AB} + \vec{CB}.$ | 18. $A(4; 1; 0), B(2; -2; 1), C(6; 3; 1),$
$\vec{a} = \vec{CB} - \vec{AB}.$ |
| 19. $A(4; 1; 0), B(2; -2; 1), C(6; 3; 1),$
$\vec{a} = \vec{AB} + \vec{CA}.$ | 20. $A(4; 1; 0), B(2; -2; 1), C(6; 3; 1),$
$\vec{a} = \vec{CB} + \vec{AC}.$ |

21. $A(-1; -2; 4), B(-4; -2; 0),$
 $C(3; -2; 1), \vec{a} = \vec{AC} + \vec{BC}.$
22. $A(-1; -2; 4), B(-4; -2; 0),$
 $C(3; -2; 1), \vec{a} = \vec{AB} - \vec{CB}.$
23. $A(-1; -2; 4), B(-4; -2; 0),$
 $C(3; -2; 1), \vec{a} = \vec{AB} + \vec{AC}.$
24. $A(-1; -2; 4), B(-4; -2; 0),$
 $C(3; -2; 1), \vec{a} = \vec{CB} - \vec{AC}.$
25. $A(-1; -2; 4), B(-4; -2; 0),$
 $C(3; -2; 1), \vec{a} = \vec{AC} - \vec{AB}.$
26. $A(-1; -2; 4), B(-4; -2; 0),$
 $C(3; -2; 1), \vec{a} = \vec{CA} - \vec{CB}.$
27. $A(-1; -2; 4), B(-4; -2; 0),$
 $C(3; -2; 1), \vec{a} = \vec{AB} + \vec{CB}.$
28. $A(-1; -2; 4), B(-4; -2; 0),$
 $C(3; -2; 1), \vec{a} = \vec{CB} - \vec{AB}.$
29. $A(-1; -2; 4), B(-4; -2; 0),$
 $C(3; -2; 1), \vec{a} = \vec{AB} + \vec{CA}.$
30. $A(-1; -2; 4), B(-4; -2; 0),$
 $C(3; -2; 1), \vec{a} = \vec{CB} + \vec{AC}.$

2. Даны точки А, В, С (координаты этих точек указаны в первом задании). Найти вектор $\vec{v} = -3\vec{u} + 7\vec{w} - 5\vec{z}$, если $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{w} = \vec{CA}$, $\vec{z} = \vec{CB}$.

3. Даны два вектора \vec{BA} , \vec{AC} , \vec{BC} (координаты этих точек указаны в первом задании). Найти угол между векторами \vec{BA} и \vec{AC} , \vec{AC} и \vec{CB} .

Расчетно-графическая работа № 4
«Аналитическая геометрия»

Задание 1. Даны координаты вершин треугольника ABC. Требуется:

- 1) вычислить длину стороны BC;
- 2) составить уравнения сторон AB и BC;
- 3) найти точку пересечения медиан;
- 4) найти тангенс угла B;
- 5) составить уравнение высоты, проведенной из вершины A, и найти ее длину;
- 6) найти координаты точки M, расположенной симметрично точки A, относительно прямой BC.

- | | |
|--|--|
| 1. $A(-12, -3), B(12, -10), C(-6, 14)$. | 2. $A(-19, -1), B(5, -8), C(-13, 16)$. |
| 3. $A(-6, -5), B(18, -12), C(0, 12)$. | 4. $A(3, 12), B(27, 5), C(9, 29)$. |
| 5. $A(6, 0), B(30, -7), C(12, 17)$. | 6. $A(-9, 20), B(15, 13), C(-3, 37)$. |
| 7. $A(-21, 18), B(3, 11), C(-15, 35)$. | 8. $A(-15, 27), B(9, 20), C(-9, 44)$. |
| 9. $A(-27, -24), B(-3, -31), C(-21, -7)$. | 10. $A(-17, 26), B(7, 19), C(-11, 43)$. |
| 11. $A(6, 2), B(30, -5), C(12, 19)$. | 12. $A(4, 3), B(-12, -9), C(-5, 15)$. |
| 13. $A(-1, 7), B(11, 2), C(17, 10)$. | 14. $A(1, 1), B(-15, 11), C(-8, 13)$. |
| 15. $A(-14, 10), B(10, 3), C(-8, 27)$. | 16. $A(7, 1), B(-5, -4), C(-9, -1)$. |
| 17. $A(-2, 1), B(-18, -11), C(-11, 13)$. | 18. $A(10, -1), B(-2, -6), C(-6, -3)$. |
| 19. $A(-12, 6), B(12, -1), C(-6, 23)$. | 20. $A(8, 0), B(-4, -5), C(-8, -2)$. |
| 21. $A(-20, 0), B(4, -7), C(-14, 17)$. | 22. $A(-16, -8), B(8, -15), C(-10, 9)$. |
| 23. $A(-20, -6), B(4, -13), C(-14, 10)$. | 24. $A(-4, 7), B(20, 0), C(2, 24)$. |
| 25. $A(-8, 8), B(16, 1), C(-2, 25)$. | 26. $A(-24, 2), B(0, -5), C(-18, 19)$. |
| 27. $A(-14, 6), B(10, -1), C(-8, 23)$. | 28. $A(-8, -3), B(4, -12), C(8, 10)$. |
| 29. $A(-5, 7), B(7, -2), C(11, 20)$. | 30. $A(-12, -1), B(0, -10), C(4, 12)$. |

Задание 2. Привести к каноническому виду уравнение, построить линию.

Вариант 1 $2x^2+6x+4y^2+8y-3=0$	Вариант 2 $x^2-2y^2-16y+13=0$
Вариант 3 $3x^2+3y^2-6x+9y-1=0$	Вариант 4 $2x^2+6x+4y^2+8y-3=0$
Вариант 5 $x^2-y^2-x+2y=0$	Вариант 6 $3x^2+9y^2-6x+9y-1=0$
Вариант 7 $5x^2+y^2+5x+2y-1=0$	Вариант 8 $x^2+y^2-x+2y=0$
Вариант 9 $3x^2+3y^2+6x+9y-9=0$	Вариант 10 $2x^2+y^2+5x+2y-1=0$
Вариант 11 $x^2+2y^2+4x-26y-3=0$	Вариант 12 $3x^2+2y^2+6x+9y-9=0$
Вариант 13 $x^2-2y^2+4x-6y-3=0$	Вариант 14 $x^2+13y^2+4x-26y-3=0$
Вариант 15 $3x^2-y^2-12x+11=0$	Вариант 16 $4x^2+y^2+4x-6y-3=0$
Вариант 17 $x+y^2-16y+13=0$	Вариант 18 $x^2+y^2-12x+11=0$
Вариант 19 $2x^2+6x-2y^2+8y-3=0$	Вариант 20 $x+y^2-16y+13=0$
Вариант 21 $3x^2+y^2-6x+9y-1=0$	Вариант 22 $3x^2+6x+2y^2+8y-3=0$
Вариант 23 $x^2+y^2-x+2y=0$	Вариант 24 $x^2+3y^2-6x+9y-1=0$
Вариант 25 $5x^2+y^2+5x+2y-1=0$	Вариант 26 $x^2+y^2-x+2y=0$
Вариант 27 $x^2+y^2+4x-26y-3=0$	Вариант 28 $x^2+2y^2+5x+2y-1=0$
Вариант 29 $x^2+y+4x-3=0$	Вариант 30 $3x^2-y^2+6x+9y-9=0$
Вариант 31 $x^2+y-12x+11=0$	Вариант 32 $x^2-2y^2+4x-6y-3=0$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гулай Т.А., Жукова В.А., Мелешко С.В., Невидомская И.А. Математика (рабочая тетрадь) // Международный журнал экспериментального образования. Москва. 2015. № 2-2. С.255-256.
2. Литвин Д.Б., Гулай Т.А., Долгополова А.Ф., Родина Е.В., Цыплакова О.Н. Векторы и векторные пространства. Учебное пособие / Ставрополь, 2014.
3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: 35 лекций в 2 ч. Ч. 1. - 9-е изд. - М.: Айрис-пресс, 2008. – 288 с.
4. Шипачев В.С. Высшая математика: Учебник / В.С. Шипачев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 479 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 1 МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ	3
1.1 Матрицы. Основные понятия и определения.....	3
1.2 Операции над матрицами. Умножение матрицы на число	4
1.3 Определители квадратных матриц	7
1.4 Обратная матрица	13
1.5 Ранг матрицы	17
ГЛАВА 2 СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ	21
2.1 Метод обратной матрицы, формулы Крамера, метод Гаусса	21
ГЛАВА 3 ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА	32
3.1 Линейные операции над векторами. Линейная зависимость векторов.....	32
3.2 Скалярное произведение векторов	35
ГЛАВА 4 АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ.....	39
4.1 Понятие уравнения линии. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении.....	39
4.2 Прямая линия на плоскости.....	40
4.3 Расстояние от точки до прямой.....	43
4.4 Кривые второго порядка.....	49
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №1.....	57
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №2.....	72
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №3.....	82
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №4.....	84
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	86
ОГЛАВЛЕНИЕ.....	87